
INTEGRIEREN

Die Klausuren zu den *Mathematische Methoden der Physik* haben gezeigt, dass das Integrieren noch sehr viel geübt werden muss. Wir üben also einige wichtige Integrale, die in der Physik auftreten, besonders das Volumenintegral.

[P1] *Potential*

Wir betrachten noch einmal das Kepler-Problem. Für eine Punktmasse m an der Stelle $\vec{r}\,'$ ist das Potential an der Stelle $\vec{r}$ gegeben durch $V(\vec{r}) = -\frac{G_N m}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$. Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit Dichtefunktion $\rho(\vec{r}\,')$ hat man dann das Potential

$$V(\vec{r}) = -\int \mathrm{d}^3 r' \frac{G_N \rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad \text{mit} \quad \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}\,') = M\,,$$

wobei M die Gesamtmasse der Massenverteilung ist. Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber eine kugelförmige Massenverteilung mit Radius R_+ und homogener Dichte

$$\rho(\vec{r}\,') = \begin{cases} \rho_0 & \text{wenn} \quad R_- \le r' \le R_+\,, \\ 0 & \text{wenn} \quad r' < R_- \text{ oder } R_+ < r'\,. \end{cases}$$

(a) Das Problem ist rotationssymmetrisch. Es bieten sich daher sphärische Koordinaten an. Wie lautet $\mathrm{d}^3 r$ in Kugelkoordinaten?

(b) Zeigen Sie für $r > R_+$, dass tatsächlich das Potential $V(r) = -\frac{\alpha M}{r}$ identisch zu dem einer Punktmasse mit der Gesamtmasse M ist.

(c) Zeigen Sie für $r < R_-$, dass das Potential $V(r) \equiv 0$ im Innern der Kugelschale verschwindet.

(d) Betrachten Sie die Vollkugel, d.h. $R_- = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im Innern der Massenverteilung, also für $r < R_+$, gegeben ist durch $V(r) = \frac{G_N M}{2R_+}\left(\frac{r^2}{R_+^2} - 3\right)$.

[P2] *Volumina von Kugeln*

Wir wollen die Volumina von n-dimensionalen Kugeln bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie mittels wiederholter partieller Integration das Integral $C_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}t \cos^n(t)$. Sie finden eine Rekursionsbeziehung für die C_n. Berechnen Sie explizit C_0 und C_1.

(b) Veranschaulichen Sie sich für $n = 3$ folgenden Prozess: Eine Kugel vom Radius R ist die Punktmenge $(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$, für die $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + u^2 \le R^2$ gilt. Schneidet man diese Kugel senkrecht zur u-Achse mit einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene, so sind die Schnitte $(n-1)$-dimensionale Kugeln mit Radius $r = \sqrt{R^2 - u^2}$.

(c) Es bezeichne $V_n(R)$ das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R. Machen Sie sich klar, dass $V_n(R) = V_n R^n$ ist, wobei $V_n(1) = V_n$ abgekürzt wird.

(d) Schreiben Sie damit $V_n(R) = \int_{-R}^{R} V_{n-1}(r)\mathrm{d}u$, substituieren Sie $u = R\sin\alpha$ und $\mathrm{d}u = R\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$ und verwenden Sie Ihr Resultat aus (a). Zeigen Sie damit schließlich, dass $V_n = C_n V_{n-1}$ ist. Berechnen Sie V_1 explizit.

(e) Führen Sie die Rekursion aus und fassen die Produkte aus den C_i geschickt zusammen. Unterscheiden Sie dabei den Fall n gerade und n ungerade.